# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

**pro žáky**
**základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií**

**63. ROČNÍK, 2013/2014**

http://math.muni.cz/mo

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

| ročník | | | kategorie |
|---|---|---|---|
| ZŠ | 8leté G | 6leté G | |
| 9 | 4 | 2 | Z9 |
| 8 | 3 | 1 | Z8 |
| 7 | 2 | – | Z7 |
| 6 | 1 | – | Z6 |
| 5 | – | – | Z5 |

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

## Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

**Školní kolo**: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **25. listopadu 2013** a druhou trojici úloh do **6. ledna 2014**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **6. ledna 2014** a druhou trojici úloh do **17. března 2014**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

**Okresní kolo** se uskuteční
pro kategorii Z9 **22. ledna 2014**,
pro kategorii Z6 až Z8 **9. dubna 2014**,
pro kategorii Z5 **22. ledna 2014**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 90 minut.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

**Krajské kolo** pro kategorii Z9 se bude konat **19. března 2014** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO.* Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

**Pokyny a rady soutěžícím**

**Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:**

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2013/2014
Úloha Z8–I–3

**Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali.** Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

*Řešení.* Délky stran obdélníku označíme $a$, $b$. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla $-40$ na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

## KATEGORIE Z5

### Z5–I–1

Mezi dvěma tyčemi je napnutá šňůra dlouhá 3,8 m, na kterou chce maminka pověsit vyprané kapesníky. Všechny kapesníky mají tvar čtverce o straně 40 cm. Na šňůře však už visí dva kapesníky stejného tvaru od sousedky a ty chce maminka nechat na svých místech. Přitom levý roh jednoho z těchto kapesníků je 60 cm od levé tyče a levý roh toho druhého je 1,3 m od pravé tyče.

Kolik nejvíce kapesníků může maminka na šňůru pověsit? Kapesníky se věší natažené za oba rohy tak, aby se žádné dva nepřekrývaly.

(*M. Mach*)

### Z5–I–2

Vojta má dvě stejná sklíčka tvaru rovnostranného trojúhelníku, která se liší pouze svou barvou — jedno je červené, druhé modré. Pokud se sklíčka položí přes sebe, vznikne útvar fialové barvy. Udejte příklad překrývání sklíček, při kterém mohl Vojta dostat:

a) fialový trojúhelník,
b) fialový čtyřúhelník,
c) fialový pětiúhelník,
d) fialový šestiúhelník.

(*E. Novotná*)

### Z5–I–3

Palindrom je takové číslo, které je stejné, ať ho čteme zepředu nebo zezadu. (Např. číslo 1881 je palindromem.)

Najděte dvojmístný a trojmístný palindrom tak, aby jejich součet byl čtyřmístným palindromem. (*M. Volfová*)

### Z5–I–4

Evě se líbí čísla dělitelná šesti, Zdeně čísla obsahující aspoň jednu šestku a Janě čísla, jejichž ciferný součet je 6.

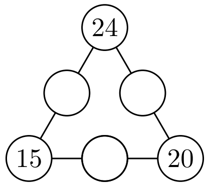
1. Která dvojmístná čísla se líbí všem třem dívkám?
2. Která dvojmístná čísla se dvěma dívkám líbí, ale jedné se nelíbí?

(*M. Petrová*)

**Z5–I–5**

Doplňte do prázdných kroužků přirozená čísla tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný a aby součet všech šesti čísel byl 100.

(*L. Šimůnek*)




**Z5–I–6**

Recepční v hotelu si vykládala karty a dostala následující posloupnost:

$$5,\ 9,\ 2,\ 7,\ 3,\ 6,\ 8,\ 4.$$

Přesunula dvě sousední karty na jiné místo tak, že tato dvojice opět sousedila, a to ve stejném pořadí. Tento krok provedla celkem třikrát, dokud nebyly karty uspořádány vzestupně podle své hodnoty.

Zjistěte, jak recepční postupovala. (*L. Hozová*)

## KATEGORIE Z6

**Z6–I–1**

V továrně na výrobu plyšových hraček mají dva stroje. První vyrobí čtyři zajíce za stejnou dobu, za kterou vyrobí druhý pět medvědů. Aby bylo jejich ovládání jednodušší, oba stroje se spouští a vypínají najednou společným vypínačem. Navíc jsou stroje seřízené tak, že první po spuštění nejdříve vyrobí tři zajíce růžové, pak jednoho modrého, pak zase tři růžové atd. Druhý po spuštění nejprve vyrobí čtyři medvědy modré, pak jednoho růžového, pak opět čtyři modré atd.

V jistém okamžiku bylo na těchto dvou strojích vyrobeno celkem 220 modrých hraček. Kolik bylo k témuž okamžiku vyrobeno růžových zajíců? (*M. Petrová*)

**Z6–I–2**

Jirka, Míša, Petr, Filip a Saša skákali do dálky. Saša skočil 135 cm, Petr skočil o 4 cm více než Jirka, Jirka o 6 cm méně než Míša a Míša o 7 cm méně než Filip. Navíc Filipův skok byl přesně v polovině mezi tím Petrovým a Sašovým.

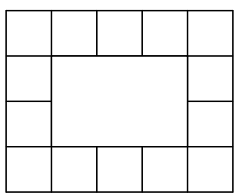
Zjistěte, kolik cm skočili jednotliví chlapci. (*M. Dillingerová*)

**Z6–I–3**

Kolik musíme napsat číslic, chceme-li vypsat všechna přirozená čísla od 1 do 2013? (*M. Volfová*)

**Z6–I–4**

Správně vyplněná tabulka na obrázku má obsahovat šest přirozených čísel, přičemž v šedém poli má být součet čísel z dvou bílých polí, která s ním sousedí.

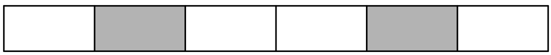


Určete čísla správně vyplněné tabulky, víte-li, že součet prvních dvou čísel zleva je 33, součet prvních dvou čísel zprava je 28 a součet všech šesti čísel je 64. (*L. Šimůnek*)

**Z6–I–5**

Adam dostal od dědečka dřevěné kostky. Všechny byly stejné a byly to krychle s hranou dlouhou 4 cm. Rozhodl se, že z nich bude skládat komíny, a to takové:

- aby byly použity všechny kostky,
- aby komín při pohledu shora vypadal jako „dutý obdélník“ nebo „dutý čtverec“ ohraničený jednou řadou kostek (podobně jako na obrázku),
- aby ani v nejvyšší vrstvě žádná kostka nechyběla.



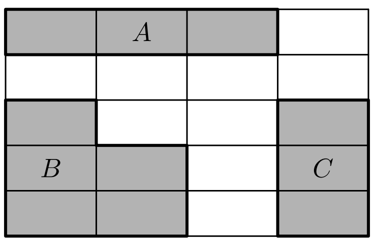
Adam zjistil, že podle těchto pravidel může postavit komín vysoký 16 cm, nebo 20 cm, nebo 24 cm.

1. Jaký nejmenší počet kostek mohl Adam dostat od dědečka?
2. Jak vysoký je nejvyšší komín, který může Adam s tímto počtem kostek postavit podle uvedených pravidel?

(*M. Petrová*)

**Z6–I–6**

Na obrázku je síť složená z 20 shodných obdélníků, do které jsme zakreslili tři obrazce a vybarvili je. Obdélník označený písmenem $A$ a šestiúhelník označený písmenem $B$ mají shodné obvody, a to 56 cm. Vypočítejte obvod třetího obrazce označeného písmenem $C$. (*L. Šimůnek*)



## KATEGORIE Z7

**Z7–I–1**

Na lavičce v parku sedí vedle sebe Andulka, Barborka, Cilka, Dominik a Eda. Andulce jsou 4 roky, Edovi je 10 let, součin věků Andulky, Barborky a Cilky je 140, součin věků Barborky, Cilky a Dominika je 280 a součin věků Cilky, Dominika a Edy je 560. Kolik roků je Cilce? (*L. Hozová*)

**Z7–I–2**

K babičce přijeli na prázdniny vnuci — pět různě starých bratrů. Babička jim řekla, že pro ně má celkem 600 Kč jako kapesné, jež si mají rozdělit tak, aby:

- nejstarší dostal nejvíc,
- každý mladší dostal o určitou částku méně než jeho starší věkově nejbližší sourozenec,
- tato částka byla stále stejná,
- nejmladší dostal částku, kterou lze vyplatit v desetikorunách a která není menší než 50 Kč, ale není větší než 80 Kč.

Určete všechny možnosti, jak si mohli vnuci kapesné rozdělit.

(*M. Volfová*)

**Z7–I–3**

Jirka, Míša, Petr, Filip a Saša skákali do dálky. Saša skočil 135 cm, Petr skočil o 4 cm více než Jirka a Míša o 7 cm méně než Filip. Navíc Filipův skok byl přesně v polovině mezi tím Petrovým a Sašovým a nejkratší skok měřil 127 cm.

Zjistěte, kolik cm skočili jednotliví chlapci. (*M. Dillingerová*)

**Z7–I–4**

V hostinci U tří prasátek obsluhují Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hostovi připočítá k celkové ceně 6 krejcarů. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje přesně to, co snědl a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hostovi dá slevu z celkové útraty ve výši 20 %. Prasátka si jsou tak podobná, že žádný host nepozná, které zrovna obsluhuje.

Koza Líza zašla v pondělí, v úterý i ve středu do tohoto hostince na borůvkový knedlík. Přestože věděla, že v pondělí byl Rašík nemocný a neobsluhoval, utratila za svůj pondělní, úterní i středeční knedlík dohromady stejně, jako kdyby ji vždy obsluhoval Rašík.

Kolik krejcarů účtuje Rašík za jeden borůvkový knedlík? Najděte všechny možnosti. (Ceny uváděné v jídelním lístku se v tyto dny neměnily.) (*M. Petrová*)

**Z7–I–5**

Maminka dělí čokoládu, která má $6 \times 4$ shodných dílků, svým třem dětem. Jak může maminka čokoládu rozdělit na právě tři části se stejným obsahem tak, aby jeden útvar byl trojúhelník, jeden čtyřúhelník a jeden pětiúhelník? (*E. Novotná*)

**Z7–I–6**

Když Azor stojí na psí boudě a Punťa na zemi, je Azor o 70 cm vyšší než Punťa. Když Punťa stojí na psí boudě a Azor na zemi, je Punťa o 90 cm vyšší než Azor. Jak vysoká je psí bouda? (*L. Hozová*)

## KATEGORIE Z8

### Z8–I–1

Na okružní lince ve městě jede tramvaj, v níž je 300 cestujících. Na každé zastávce se odehraje jedna z následujících situací:

- pokud je v tramvaji aspoň 7 cestujících, tak jich 7 vystoupí,
- pokud je v tramvaji méně než 7 cestujících, tak 5 nových cestujících přistoupí.

Vysvětlete, proč v jistý okamžik v tramvaji nezůstane žádný cestující. Poté zjistěte, kolik by mělo být na začátku v tramvaji cestujících, aby se tramvaj nikdy nevyprázdnila. (*J. Mazák*)

### Z8–I–2

Maminka dělí čokoládu, která má $6 \times 4$ shodných dílků, svým čtyřem dětem. Jak může maminka čokoládu rozdělit na právě čtyři části se stejným obsahem tak, aby jeden útvar byl trojúhelník, jeden čtyřúhelník, jeden pětiúhelník a jeden šestiúhelník? (*E. Novotná*)

### Z8–I–3

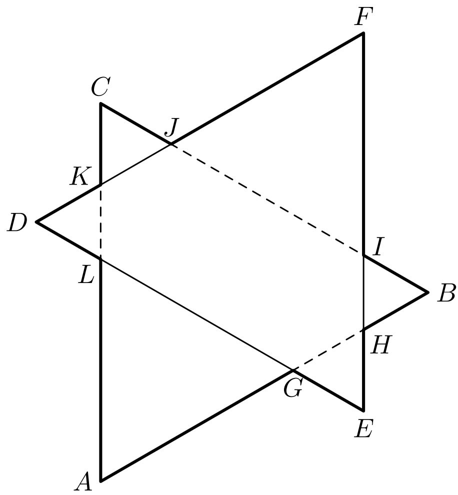
Změňte v každém ze tří čísel jednu číslici tak, aby byl příklad na odčítání bez chyby:

$$\begin{array}{r} 7\ 2\ 4 \\ -\ 3\ 0\ 7 \\ \hline 1\ 8\ 8 \end{array}$$

Najděte všechna řešení. (*M. Petrová*)

### Z8–I–4

Trojúhelníky $ABC$ a $DEF$ jsou rovnostranné s délkou strany 5 cm. Tyto trojúhelníky jsou položeny přes sebe tak, aby strany jednoho trojúhelníku byly rovnoběžné se stranami druhého a aby průnikem těchto dvou trojúhelníků byl šestiúhelník (na obrázku označený jako $GHIJKL$).




Je možné určit obvod dvanáctiúhelníku $AGEHBIFJCKDL$, aniž bychom znali přesnější informace o poloze trojúhelníků? Pokud ano, spočítejte jej; pokud ne, vysvětlete proč. (*E. Patáková*)

**Z8–I–5**

Zákazník vyvážející odpad do sběrného dvora je povinen zastavit naloženým autem na váze a po vykládce odpadu znovu. Rozdíl naměřených hmotností tak odpovídá vyvezenému odpadu. Pat a Mat chybovali. Při vážení naloženého auta se na váhu připletl Pat a při vážení vyloženého auta se tam místo Pata nachomýtl Mat. Vedoucí dvora si tak zaznamenal rozdíl 332 kg. Poté se na prázdnou váhu postavili společně vedoucí a Pat, posléze samotný Mat a váha ukázala rozdíl 86 kg. Dále se spolu zvážili vedoucí a Mat, poté samotný Pat a váha ukázala rozdíl 64 kg.

Kolik vážil vyvezený odpad ve skutečnosti? (*L. Šimůnek*)

**Z8–I–6**

V domě máme mezi dvěma patry dvě různá schodiště. Na každém z těchto schodišť jsou všechny schody stejně vysoké. Jedno ze schodišť má každý schod vysoký 10 cm, druhé má o 11 schodů méně než to první. Během dne jsem šel pětkrát nahoru a pětkrát dolů, přičemž jsem si mezi těmito dvěma schodišti vybíral náhodně. Celkem jsem na každém ze schodišť zdolal stejný počet schodů.

Jaký je výškový rozdíl mezi patry? (*M. Mach*)

## KATEGORIE Z9

**Z9–I–1**

Petr si myslí dvojmístné číslo. Když tohle číslo napíše dvakrát za sebou, vznikne čtyřmístné číslo, které je dělitelné devíti. Když totéž číslo napíše třikrát za sebou, vznikne šestimístné číslo, které je dělitelné osmi. Zjistěte, jaké číslo si může Petr myslet. (*E. Novotná*)

**Z9–I–2**

Je dán rovnoramenný lichoběžník s délkami stran $|AB| = 31\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 26\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 11\,\mathrm{cm}$. Na straně $AB$ je bod $E$ určený poměrem vzdáleností $|AE| : |EB| = 3 : 28$. Vypočítejte obvod trojúhelníku $CDE$. (*L. Dedková*)

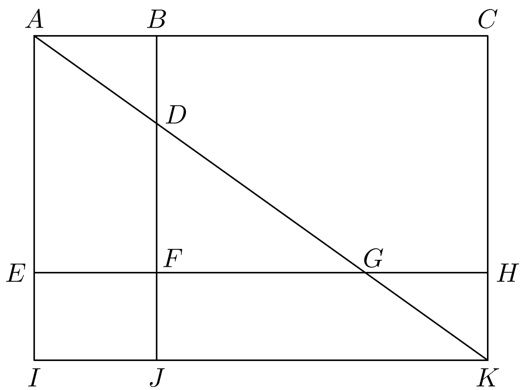
**Z9–I–3**

Podlahu tvaru obdélníku o stranách 360 cm a 540 cm máme pokrýt (beze spár) shodnými čtvercovými dlaždicemi. Můžeme si vybrat ze dvou typů čtvercových dlaždic, jejichž strany jsou v poměru 2 : 3. V obou případech lze pokrýt celou plochu jedním typem dlaždic bez řezání. Menších dlaždic bychom potřebovali o 30 více než větších.

Určete, jak dlouhé jsou strany dlaždic. (*K. Pazourek*)

**Z9–I–4**

V pravoúhelníku $ACKI$ jsou vyznačeny dvě rovnoběžky se sousedními stranami a jedna úhlopříčka. Přitom trojúhelníky $ABD$ a $GHK$ jsou shodné. Určete poměr obsahů pravoúhelníků $ABFE$ a $FHKJ$. (*V. Žádník*)



**Z9–I–5**

Eva řešila experimentální úlohu fyzikální olympiády. Dopoledne od 9:15 prováděla v tříminutových odstupech 4 měření. Získané hodnoty zapisovala do tabulky, kterou si připravila v počítači:

| hodin | minut | hodnota |
|---|---|---|
| 9 | 15 | |
| 9 | 18 | |
| 9 | 21 | |
| 9 | 24 | |

Odpoledne v experimentu pokračovala. Tentokrát provedla v tříminutových odstupech 9 měření a hodnoty zapisovala do podobné tabulky. Omylem do počítače zadala, aby se zobrazil součet devíti čísel z prostředního sloupce. Tento zbytečný výpočet vyšel 258.

Která čísla byla v daném sloupci? (*L. Šimůnek*)

**Z9–I–6**

V hostinci U Tří prasátek obsluhují Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hostovi připočítá k celkové ceně 10 krejcarů. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje přesně to, co snědl a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hostovi dá slevu z celkové útraty ve výši 20 %. Prasátka si jsou tak podobná, že žádný host nepozná, které zrovna obsluhuje.

Beránek Vendelín si v pondělí objednal tři koláčky a džbánek džusu a zaplatil za to 56 krejcarů. Byl spokojen, takže hned v úterý snědl pět koláčků, vypil k nim tři džbánky džusu a platil 104 krejcary. Ve středu snědl osm koláčků, vypil čtyři džbánky džusu a zaplatil 112 krejcarů.

1. Kdo obsluhoval Vendelína v pondělí, kdo v úterý a kdo ve středu?
2. Kolik krejcarů účtuje Rašík za jeden koláček a kolik za jeden džbánek džusu?

(Všechny koláčky jsou stejné, stejně tak všechny džbánky džusu. Ceny uváděné v jídelním lístku se v uvedených dnech neměnily.) (*M. Petrová*)